# §3 导体对电磁波的影响

1

## 一、导体内部电荷密度的演化

导体中的电磁场方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=\partial_t\vec{B}, & \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\partial_t\vec{D}, & \nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

$\vec{J}_f=\sigma\vec{E}$ **【导体中极化、磁化现象可略（除铁磁体）】**

- 在均匀导体内，有

$$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J}_f=-\sigma\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{D}=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho_f$$

$$\Longrightarrow\quad \rho_f(t,\vec{x})=\rho_f(0,\vec{x})e^{-t/\tau},\quad \tau\triangleq\varepsilon_0/\sigma\sim10^{-17}\ \mathrm{s}$$

- ➢ **均匀导体内部的自由电荷随时间按指数趋于零。**
- ➢ $f\ll10^{17}$ **Hz** ($\lambda\gg3$ **nm**)**：良导体内部不存在净自由电荷。**

2

## 二、定态波动方程

利用欧姆定律，定态情况下导体中的麦克斯韦方程写为

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=+i\omega\vec{B} \\ \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}-i\omega\vec{D} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_f & \longrightarrow \text{在均匀导体内冗余。} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & \longrightarrow \text{冗余。} \end{cases}$$

- 导体界面处，场方程写为边值关系。独立的边值关系有三个：

$$\begin{cases} \hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 & \longrightarrow \text{可用于场的求解。} \\ \hat{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0 & \longrightarrow \text{可用于场的求解。} \\ \hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_f & \longrightarrow \text{可用于得到面电荷。} \\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 & \longrightarrow \text{冗余。} \end{cases}$$

3

## 导体的等效复介电常数

在均匀导体内，时谐场满足的基本方程写为

$$\nabla\times\vec{E}=+i\omega\mu\vec{H},\quad \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}-i\omega\varepsilon\vec{E}$$

定义**复介电常数**：

$$\tilde{\varepsilon}\triangleq\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$$

则均匀导体内，时谐场满足的基本方程可以写为

$$\nabla\times\vec{E}=+i\omega\mu\vec{H},\quad \nabla\times\vec{H}=-i\omega\tilde{\varepsilon}\vec{E}$$

- **导体可视为具有复介电常数的介质。**
  - 定态情形下，自由电荷与极化电荷作用相当。
- 导体中的传导电流和位移电流：

$$\vec{J}_f=\sigma\vec{E},\quad \vec{J}_D=\partial_t\vec{D}=-i\omega\varepsilon\vec{E}\quad\Rightarrow\quad\frac{J_f}{J_D}\sim\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

4

## 不良导体与良导体

- **不良导体：** $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$
  - **物理含义：导体中的位移电流≫传导电流。**
  - 此情形出现于$\sigma$很小，或$\sigma$虽较大，但$\omega$相当高的时候。
- **良导体：** $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$
  - **物理含义：导体中的传导电流≫位移电流。**
  - **金属导体总是属于此情形：**频率达到$10^{17}$ Hz时，$J_D$才与$J_f$同一量级，而如此高的频率下，量子效应和介质的原子性都很显著，宏观的经典理论已不适用。

5

## 亥姆霍兹方程

定态情形下，均匀介质中的电磁场方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=+i\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}=-i\omega\tilde{\varepsilon}\vec{E}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \vec{H}=-\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}\end{cases}$$

其中：

$$k^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}=\omega^2\mu\varepsilon+i\omega\mu\sigma$$

6

## 三、单色平面波解

单色平面波的一般形式为：

$$\vec{E}(t,\vec{x})=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

作为导体中传播的电磁波，要求其满足：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 & \Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0 & \Longrightarrow\quad \vec{k}\cdot\vec{E}=0\\ \vec{H}=-\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E} & \Longrightarrow\quad \vec{H}=\dfrac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}\end{cases}$$

7

## 复波矢

导体中单色平面波的波矢$\vec{k}$**必为复矢量**：$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$。从而

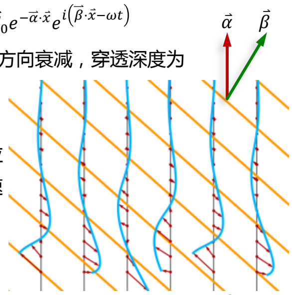
$$\vec{E}(t,\vec{x})=\vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

- **$\vec{\alpha}$为衰减方向**：振幅沿着$\vec{\alpha}$方向衰减，穿透深度为

$$\delta\triangleq\frac{1}{\alpha}$$

- **$\vec{\beta}$沿为传播方向**：等相位面沿着$\vec{\beta}$方向传播，相速度与波长为

$$v_p=\frac{\omega}{\beta},\quad \lambda=\frac{2\pi}{\beta}$$




8

## 复波矢的求解

复波矢的方程：

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=\omega^2\mu\tilde{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow\quad \beta^2-\alpha^2+2i\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\omega^2\mu\varepsilon+i\omega\mu\sigma$$

$$\Longrightarrow\quad \beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon,\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

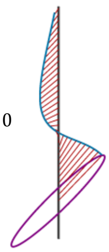
- **$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$可能平行，但绝不可能相互垂直。**
- **即便$\varepsilon$、 $\mu$和$\sigma$皆与$\omega$无关，导体中的波也会有色散效应。**
- 加上边值关系对波矢的限制，可以确定$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$。

9

## 无散条件

无散条件给出

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\beta}\cdot\vec{E}_0+i\vec{\alpha}\cdot\vec{E}_0=0$$



- 电场一般不再与传播方向$\vec{\beta}$垂直。

  **【注】**除非电场沿着$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$方向线偏振。

- $\vec{E}_0$一般也是复矢量：$\vec{E}_0=\vec{E}_0'+i\vec{E}_0''$，故可将无散条件写为

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\beta}\cdot\vec{E}_0'-\vec{\alpha}\cdot\vec{E}_0''=0, \quad \vec{\alpha}\cdot\vec{E}_0'+\vec{\beta}\cdot\vec{E}_0''=0$$

**【注】**当$\vec{E}_0'$和$\vec{E}_0''$的方向不同时，电场的振动为椭圆偏振。

10

## 单色平面波的磁场

由 Faraday 定律可得：

$$\vec{H}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu}=\frac{\left(\vec{\beta}+i\vec{\alpha}\right)\times\vec{E}}{\omega\mu}$$

- 由于$\vec{k}$是复矢量，**导体中$\vec{E}$和$\vec{H}$不再同相。**
- **导体中的单色平面波通常并非 TEM**（除非$\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$）。

---

设$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\neq 0$。若$\vec{E}$与传播方向$\vec{\beta}$垂直，则$\vec{E}\parallel\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$，由此可得

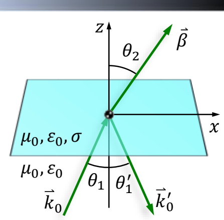
$$\vec{\beta}\cdot\vec{H}\propto\vec{\beta}\cdot\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)\propto\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\alpha}\times\vec{E}\right)=\left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{E}\neq 0$$

这样$\vec{H}$就不可能与$\vec{\beta}$垂直。

11

## 四、电磁波在导体表面的反射和折射

设两介质界面为无限大平面。




**入射波（真空内）：**

$$\vec{E}_1=\vec{E}_{01}e^{i\left(\vec{k}_0\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$$

**反射波（真空内）：**

$$\vec{E}_1'=\vec{E}_{01}'e^{i\left(\vec{k}_0'\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$$

**折射波（导体内）：**

$$\vec{E}_2=\vec{E}_{02}e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}=\vec{E}_{02}e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i\left(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t\right)}$$

- **入射面**：入射波矢与法向所张平面（设为$xz$平面$\Rightarrow k_{0y}=0$）
- 用以确定反射波和折射波性质的方程只能是边值关系：

$$\left(\vec{E}_1+\vec{E}_1'\right)_{x,y}=\left(\vec{E}_2\right)_{x,y}, \quad \left(\vec{H}_1+\vec{H}_1'\right)_{x,y}=\left(\vec{H}_2\right)_{x,y}$$

12

## 1. 边值关系对波矢的限制

由导体表面处的边值关系可得

$$k_{0x}=k'_{0x}=k_x\triangleq\beta_x+i\alpha_x,\quad k_{0y}=k'_{0y}=k_y\triangleq\beta_y+i\alpha_y$$

- 第二式给出： $k'_{0y}=k_y=\beta_y=\alpha_y=0$
  - **反射波矢、折射波矢与入射波矢共面（入射平面）。**
- 第一式给出**反射定律**$\theta_1'=\theta_1$以及 $\beta_x=k_0\sin\theta_1$， $\alpha_x=0$
  - **导体中的折射波总沿着法向衰减，等振幅面与表面平行。**
  - $\beta_z$和$\alpha_z$可由复波矢的方程确定，由此可得**折射定律**：

$$\tan\theta_2=\frac{\beta_x}{\beta_z}=\frac{k_0\sin\theta_1}{\beta_z}$$

13

## 折射波的波矢

由于$\vec{\alpha}=\alpha\hat{z}$、$\vec{\beta}=\beta_x\hat{x}+\beta_z\hat{z}$和$\beta_x=k_0\sin\theta_1$，折射波矢的方程

$$\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0,\quad \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu_0\sigma$$

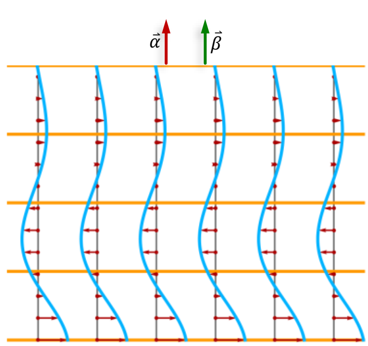
$$\Longrightarrow\quad \beta_z^2-\alpha^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\cos^2\theta_1,\quad \alpha\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu_0\sigma$$

良导体近似（ $\sigma/\omega\varepsilon_0\gg1$ ）下，其解为

$$\alpha\approx\beta_z\approx\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}\quad\Longrightarrow\quad \tan\theta_2=\frac{\beta_x}{\beta_z}\approx\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\sin\theta_1\ll1$$

- **良导体近似下，折射波几乎沿着法向传播。**
- **良导体中波矢实部和虚部几乎相同，电磁波的相速度$\ll c$。**

14




**正入射（$\theta_1=0$）时折射波沿着法向传播，并沿着法向衰减。**

15

## 趋肤效应

良导体近似下，穿透深度为

$$\delta \triangleq \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

- **趋肤效应：**穿透深度极小，仅存在于导体表层。

| | 频率 | 波长 | 穿透深度 |
|---|---|---|---|
| 铜 | 50 Hz | 6000 km | 9 mm |
| | 100 MHz | 3 m | 7 μm |
| | $10^{10}$ Hz | 3 cm | 0.7 μm |

- **频率越高，穿透深度越小。**

16

## 能量的返流

简单起见，考察正入射（$\theta_1 = 0 = \theta_2$）情形。在良导体近似下

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{k} = (\beta + i\alpha)\hat{z} \approx \sqrt{\omega\mu_0\sigma}\, e^{i\pi/4}\hat{z}$$

因此，

$$\vec{E}_2 \approx \vec{E}_{02} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)}, \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_2}{\omega\mu_0} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}}\, e^{i\pi/4}\hat{z} \times \vec{E}_2$$

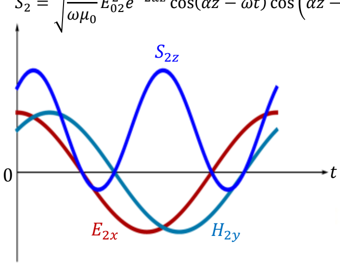
- $\vec{E}_2, \vec{H}_2, \hat{z}$构成右手正交系。但是$\vec{H}_2$与$\vec{E}_2$之间有一相位差$\pi/4$。
- **一个周期内，有时能流$\vec{S}$与$\hat{z}$反向：波总是沿着$\hat{z}$方向向前传播，而能流却有时向前、有时向后，后一情况称为能量的返流。**

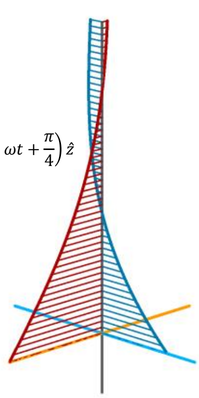
17

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}_2 = E_{02} e^{-\alpha z} \cos(\alpha z - \omega t)\,\hat{x}$$

$$\mathrm{Re}\,\vec{H}_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}} E_{02} e^{-\alpha z} \cos\left(\alpha z - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{y}$$

$$\vec{S}_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu_0}} E_{02}^2 e^{-2\alpha z} \cos(\alpha z - \omega t) \cos\left(\alpha z - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{z}$$



## 良导体中磁能为主

仍然考察**正入射**（$\theta_1 = 0 = \theta_2$）情形。在**良导体近似下**

$$\vec{E}_2 \approx \vec{E}_{02} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)}, \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_2}{\omega \mu_0} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \mu_0}} e^{i\pi/4} \hat{z} \times \vec{E}_2$$

磁能密度比为

$$\frac{1}{2}\mu_0 \left|\vec{H}_2\right|^2 \approx \frac{\sigma}{2\omega}\left|\vec{E}_2\right|^2 = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_2\right|^2\right) \gg \frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}_2\right|^2$$

**良导体中，电磁波以磁场能量为主。**

$$\frac{w_m}{w_e} \sim \frac{J_f}{J_D} \sim \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \gg 1$$

19

## 2. 边值关系对振幅的限制

简单起见，考察**正入射**（$\theta_1 = 0 = \theta_2$）。并设入射波的电场沿着$y$轴方向线偏振。则有（其中$k = \beta + i\alpha$，$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$）

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_{01} e^{i(k_0 z - \omega t)} \hat{y}, & \vec{H}_1 = -(k_0 E_{01}/\omega\mu_0) e^{i(k_0 z - \omega t)} \hat{x} \\ \vec{E}_1' = E_{01}' e^{-i(k_0 z + \omega t)} \hat{y}, & \vec{H}_1' = +(k_0 E_{01}'/\omega\mu_0) E_{01}' e^{-i(k_0 z + \omega t)} \hat{x} \\ \vec{E}_2 = E_{02} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}, & \vec{H}_2 = -(k E_{02}/\omega\mu_0) E_{02} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} \end{cases}$$

利用边值关系，有

$$E_{01} + E_{01}' = E_{02} \quad k_0(E_{01} - E_{01}') = kE_{02}$$

$$\Longrightarrow \quad r \triangleq \frac{E_{01}'}{E_{01}} = \frac{k_0 - k}{k_0 + k}, \quad t \triangleq \frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{2k_0}{k_0 + k}$$

20

## 良导体也是良反射体

在良导体近似下

$$k \approx \alpha(1+i) = \frac{1+i}{\delta} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{k_0 - k}{k_0 + k} \approx \frac{k_0\delta - 1 - i}{k_0\delta + 1 + i}$$

其中

$$k_0\delta \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \ll 1$$

因而反射系数为

$$R = |r|^2 \approx \frac{(k_0\delta - 1)^2 + 1}{(k_0\delta + 1)^2 + 1} \approx \frac{1 - k_0\delta}{1 + k_0\delta} \approx 1 - 2k_0\delta \approx 1$$

**良导体也是良反射体。**

21

## 理想导体也是理想反射体

良导体近似下，即使是正入射，$R \approx 1$。以铅为例，在波长短至3 mm时，$R$与1仍只相差0.11%；波长较长时，$R$还更大些。

对于理想导体， $R = 1$ 。

- **理想导体中的电磁场衰减虽极快（$\alpha = \infty$），但并无能量损耗，全部能量都被反射回去。**

22

## 良导体的表面电阻

$$\vec{E}_2 = E_{02} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \hat{y}, \quad \vec{H}_2 = -\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}} E_{02} e^{i\pi/4} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \hat{x}$$

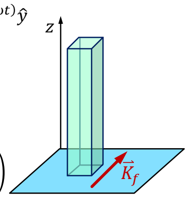
- 导体中的电流

$$\vec{J}_f = \sigma \vec{E}_2 = \sigma E_{02} e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \hat{y}$$

- 等效面电流

$$\vec{K}_f \triangleq \int_0^\infty \vec{J}_f dz = \frac{\sigma E_{02} e^{-i\omega t}}{\alpha(1-i)} \hat{y}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{K}_f = K_0 e^{i\pi/4} e^{-i\omega t} \hat{y}, \quad \left(K_0 = \frac{\sigma E_{02}}{\sqrt{2}\alpha}\right)$$




23

- 平均焦耳功率密度为

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_f^*\right) = \frac{1}{2} \sigma E_{02}^2 e^{-2\alpha z}$$

- 单位面积上的平均焦耳功率

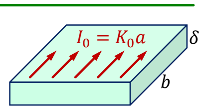
$$\frac{d\langle P \rangle}{dA} \triangleq \int_0^\infty \langle p \rangle dz = \frac{\sigma E_{02}^2}{4\alpha} = \frac{\alpha}{2\sigma}\left(\frac{\sigma E_{02}}{\sqrt{2}\alpha}\right)^2 \triangleq \frac{1}{2} K_0^2 R_S$$

导体（单位面积）的**表面电阻**

$$R_S \triangleq \frac{\alpha}{\sigma}$$

$$R = \frac{b}{\sigma a \delta} = \frac{\alpha b}{\sigma a} = \frac{b}{a} R_S$$

$$\Longrightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{d\langle P \rangle}{dA} ab = \frac{1}{2} I_0^2 R$$




24

# §4 谐振腔与波导管



## 一、理想导体边界条件

定态情况下，电磁场的方程为

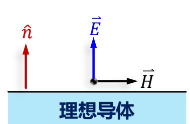
$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E}=+i\omega\vec{B}\\
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f-i\omega\vec{D}\\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\
\nabla\cdot\vec{B}=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\hat{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0\\
\hat{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{K}_f\\
\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_f\\
\hat{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0
\end{cases}
$$

- 存在理想导体时，**理想导体的表面自动成为了电磁场的边界。** 设理想导体之外区域为均匀介质，并设介质中$\rho_f=0=\vec{J}_f$。
- 此情形下**自由电荷和传导电流只是以面电荷和面电流的形式分布于理想导体表面。**
- **场方程在理想导体表面表现为边界条件。**



- 在介质内部，时谐场的方程写为了

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E}=+i\omega\vec{B}\\
\nabla\times\vec{H}=-i\omega\vec{D}\\
\nabla\cdot\vec{D}=0 & \longrightarrow \text{冗余}\\
\nabla\cdot\vec{B}=0 & \longrightarrow \text{冗余}
\end{cases}
$$




- 在理想导体表面，场方程写为边界条件：

$$
\begin{cases}
\hat{n}\times\vec{E}=0 & \longrightarrow \text{用于场的求解} & \text{（电场垂直于理想导体表面）}\\
\hat{n}\times\vec{H}=\vec{K}_f & \longrightarrow \text{用于得到面电流}\\
\hat{n}\cdot\vec{D}=\sigma_f & \longrightarrow \text{用于得到面电荷}\\
\hat{n}\cdot\vec{B}=0 & \longrightarrow \text{冗余。} & \text{（磁场平行于理想导体表面）}
\end{cases}
$$

## 理想导体边界的定态场方程

对真空（或均匀介质），用于求解电场的定态场方程为

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0,\quad \nabla\cdot\vec{E}=0,\quad (k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon})$$

- 理想导体边界条件对电场的限制

$$\begin{cases} \vec{E}_\tau\big|_S=0 & \longrightarrow \text{电场的切向分量为零} \\ \dfrac{\partial E_n}{\partial n}\Big|_S=0 & \longrightarrow \text{平面边界电场法向分量的法向导数为零} \end{cases}$$

$\boxed{\nabla\cdot\vec{E}=0}$

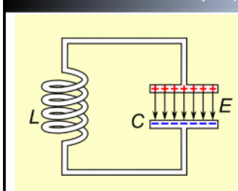
- 其他物理量的获取

$$\vec{H}=-\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E},\quad \vec{B}=\mu\vec{H},\quad \vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

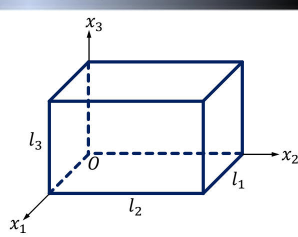
$$\Rightarrow\quad \vec{K}_f=\hat{n}\times\vec{H}\big|_S,\quad \sigma_f=\hat{n}\cdot\vec{D}\big|_S$$ （$\hat{n}$ 指向导体外）

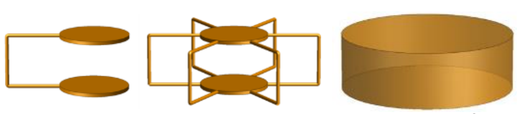
28

## 二、矩形谐振腔




$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$



29

## 分量变量解

直角坐标系下，电场任一分量$u(\vec{x})$均满足

$$\nabla^2u+k^2u=0,\quad (k^2=\omega^2\mu\varepsilon)$$

分离变量：令$u(\vec{x})=X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3)$

$$\frac{\nabla^2u}{u}+k^2=\underbrace{\boxed{\frac{1}{X_1}\frac{d^2X_1}{dx_1^2}}}_{-k_1^2}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{X_2}\frac{d^2X_2}{dx_2^2}}}_{-k_2^2}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{X_3}\frac{d^2X_3}{dx_3^2}}}_{-k_3^2}+k^2=0$$

$(k_1^2+k_2^2+k_3^2=k^2)$

分离变量解（诸$a_i,b_i$为常数）：

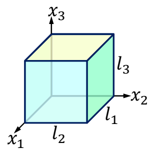
$$\begin{aligned} u(\vec{x})=&(a_1\cos k_1x_1+b_1\sin k_1x_1)\\ &\times(a_2\cos k_2x_2+b_2\sin k_2x_2)\\ &\times(a_3\cos k_3x_3+b_3\sin k_3x_3) \end{aligned}$$

30

## 矩形谐振腔的驻波解

$$\begin{array}{llll} x_1=0: & \partial_1 E_1=0, & E_2=0, & E_3=0 \\ x_2=0: & E_1=0, & \partial_2 E_2=0, & E_3=0 \\ x_3=0: & E_1=0, & E_2=0, & \partial_3 E_3=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1(\vec{x})=A_1\cos k_1x_1\ \sin k_2x_2\ \sin k_3x_3 \\ E_2(\vec{x})=A_2\sin k_1x_1\ \cos k_2x_2\ \sin k_3x_3 \\ E_3(\vec{x})=A_3\sin k_1x_1\ \sin k_2x_2\ \cos k_3x_3 \end{cases}$$




$$\begin{array}{llll} x_1=l_1: & \partial_1 E_1=0, & E_2=0, & E_3=0 \\ x_2=l_2: & E_1=0, & \partial_2 E_2=0, & E_3=0 \\ x_3=l_3: & E_1=0, & E_2=0, & \partial_3 E_3=0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_1=n_1\pi/l_1 \\ k_2=n_2\pi/l_2 \\ k_3=n_3\pi/l_3 \end{cases}$$

**【注】$n_1,n_2,n_3$为整数。**

**【思考】**电场各分量的$n_1,n_2,n_3$为什么相等？

31

## 矩形谐振腔的波模性质

$$\begin{cases} E_1(\vec{x})=A_1\cos k_1x_1\ \sin k_2x_2\ \sin k_3x_3 \\ E_2(\vec{x})=A_2\sin k_1x_1\ \cos k_2x_2\ \sin k_3x_3 \\ E_3(\vec{x})=A_3\sin k_1x_1\ \sin k_2x_2\ \cos k_3x_3 \end{cases}$$

$$k_1=\frac{n_1\pi}{l_1},\quad k_2=\frac{n_2\pi}{l_2},\quad k_3=\frac{n_3\pi}{l_3},\quad (k_1^2+k_2^2+k_3^2=\omega^2\mu\varepsilon)$$

- **电场各分量的$n_1,n_2,n_3$必须相等**（$\nabla\cdot\vec{E}=0$）
  - 每一组$(n_1,n_2,n_3)$表示一种**本征模**。**本征值**：$(k_1,k_2,k_3)$。
  - $n_1,n_2,n_3$中，至多只有一个为零（否则为零解）。
- **对每一组$(n_1,n_2,n_3)$，有两种独立的偏振模**（称为**子波模**）

$$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=0$$

  - $n_1=0,n_2=0$或$n_3=0$模式除外。

32

## 矩形谐振腔的本征频率

对应每一组特定的$(n_1,n_2,n_3)$，谐振腔的**本征频率**为

$$\omega_{n_1n_2n_3}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_2}{l_2}\right)^2+\left(\frac{n_3}{l_3}\right)^2}$$

- **本征频率只能取一系列分离的值**，其数值由腔的尺寸决定。
- 对特定的谐振腔，存在**下截止频率**$f_{\min}$。设$l_1,l_2\geq l_3$，则

$$f_{\min}=\frac{\omega_{110}}{2\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{(1/l_1)^2+(1/l_2)^2}$$

相应的**最大波长与谐振腔的尺度相当：**

$$\lambda_{\max}=\frac{v}{f_{\min}}=\frac{1}{f_{\min}\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{2}{\sqrt{(1/l_1)^2+(1/l_2)^2}}$$

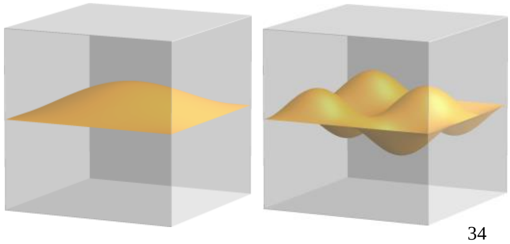
33

**（1）空间限制导致驻波、频率分立。**

（2）本征模式是可能存在的模式，是否存在依赖于外激发条件。

（3）电磁场的一般状态是各种本征模式的叠加。

**【思考】**请给出本征模的磁场以及面电荷、面电流分布。

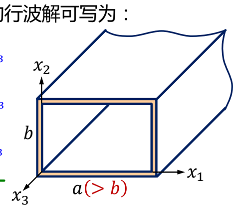


34

## 三、矩形波导

将矩形谐振腔某方向($x_3$)开放，则在该方向上没有限制，电磁能量可以传播。沿$x_3$轴正方向传播的行波解可写为：

$$\begin{cases} E_1(\vec{x}) = A_1 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \, e^{ik_3 x_3} \\ E_2(\vec{x}) = A_2 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \, e^{ik_3 x_3} \\ E_3(\vec{x}) = A_3 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \, e^{ik_3 x_3} \end{cases}$$




$$k_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{b}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 - ik_3 A_3 = 0$$

- **$m, n$为整数，且至多一个为零。**
- **诸$A_i$可为复数，即电场个分量之间可以有相位差。**

35

## 矩形波导中波模的截止频率

- 每一组$(m, n)$表示一种**本征模**，相应的$(k_1, k_2)$称为**本征值**。
- **波导中频率$\omega$可连续变化**（$k_3$连续）。
- **对特定波模，存在最小可传播的频率**：**截止频率**（$k_3 = 0$）：

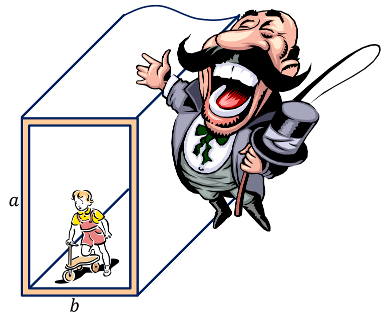
$$\omega_{mn} \triangleq \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

- **特定波导存在最小可传播的频率：下截止频率**。

$$\omega_{\min} = \omega_{10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_{\min}\sqrt{\mu\varepsilon}} = 2a$$

36




**半波长大于波导长边的电磁波不能在其中传播**

37

## 矩形波导中的色散关系

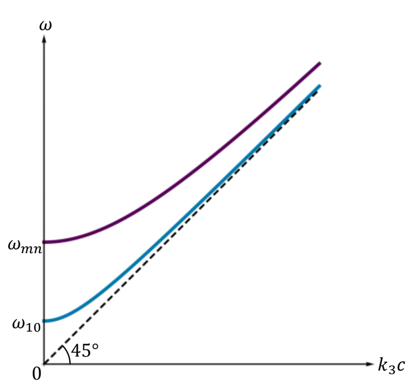
设波导内为真空。对于$(m,n)$波模，行波解的频率

$$\omega = c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \sqrt{\omega_{mn}^2 + k_3^2 c^2}$$

- 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k_3} = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{1-\omega_{mn}^2/\omega^2}}$
- 群速度：$v_g = \dfrac{d\omega}{dk_3} = \dfrac{k_3 c^2}{\sqrt{\omega_{mn}^2 + k_3^2 c^2}} = \dfrac{c^2}{\omega/k_3} = \dfrac{c^2}{v_p}$
- 由于行波解要求$\omega > \omega_{mn}$，所以总有

$$v_p v_g = c^2,\quad v_p > c,\quad v_g < c$$

38




39

## 横电模与横磁模

- 波导中存在两种独立的基本偏振模式
  - **TE（横电）模：**电场垂直于传播方向($E_3 = 0,\quad H_3 \neq 0$)
  - **TM（横磁）模：**磁场垂直于传播方向($H_3 = 0,\quad E_3 \neq 0$)
- TE模和TM模的特点（$k_1A_1 + k_2A_2 - ik_3A_3 = 0$）：
  - **TE模（$k_1, k_2$可有一个为零）：**

$$k_2A_2 = -k_1A_1,\quad A_3 = 0$$

  - **TM模（$k_1, k_2$皆不为零）：**

$$A_2 = \frac{k_2}{k_1}A_1,\quad A_3 = -i\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1k_3}A_1$$

**在$(A_1, A_2, A_3)$空间，两矢量正交**



## 波导中不能有横电磁波

$$\begin{cases} E_1 = A_1 \cos k_1x_1 \sin k_2x_2\, e^{ik_3x_3} \\ E_2 = A_2 \sin k_1x_1 \cos k_2x_2\, e^{ik_3x_3} \\ E_3 = A_3 \sin k_1x_1 \sin k_2x_2\, e^{ik_3x_3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_3 &= -\frac{i}{\omega\mu}(\partial_1E_2 - \partial_2E_1) \\ &= -\frac{i}{\omega\mu}(k_1A_2 - k_2A_1) \\ &\quad \times \cos k_1x_1 \cos k_2x_2\, e^{ik_3x_3} \end{aligned}}$$

若$H_3 = 0$，则必有$k_1A_2 = k_2A_1(1)$。而若同时$E_3 = 0$，又有

$$\begin{cases} A_3 = 0,\quad k_1k_2 \neq 0 \xRightarrow{\nabla\cdot\vec{E}=0} k_1A_1 = -k_2A_2 \xRightarrow{(1)} A_1 = A_2 = 0 \\ k_1 = 0,\quad k_2 \neq 0 \Rightarrow A_1 = 0 \leftarrow (1),\quad E_2 = 0 \\ k_2 = 0,\quad k_1 \neq 0 \Rightarrow A_2 = 0 \leftarrow (1),\quad E_1 = 0 \end{cases}$$

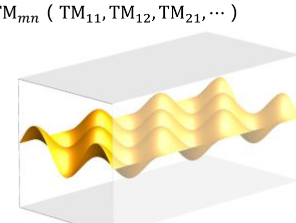
横电磁波意味着零解。



## 波导中的一般波

一般情况下，波导中传送的波，是临界波长大于所传送波长的各种基本波模的叠加，这些基本波模有：

- **TE模：**$\mathrm{TE}_{mn}$（$\mathrm{TE}_{10}, \mathrm{TE}_{01}, \mathrm{TE}_{20}, \mathrm{TE}_{02}, \mathrm{TE}_{11}, \cdots$）
- **TM模：**$\mathrm{TM}_{mn}$（$\mathrm{TM}_{11}, \mathrm{TM}_{12}, \mathrm{TM}_{21}, \cdots$）



## 主模

**$\mathrm{TE}_{10}$模是波导中最基本的模式**($k_1=\pi/a\,,k_2=0$)，称为**主模**。

$$E_2=E_0\sin\frac{\pi x_1}{a}e^{ik_3x_3},\quad E_1=E_3=0$$

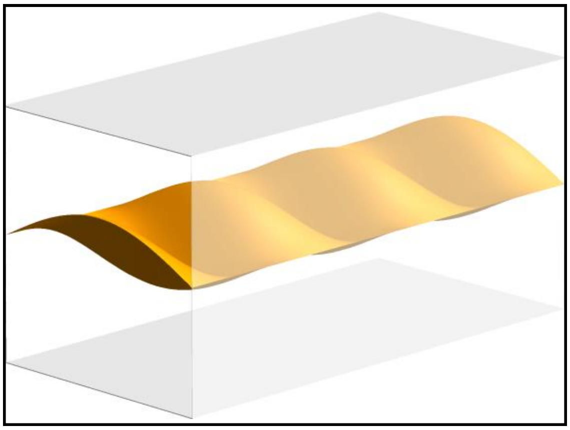
$$H_3=-\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=H_0\cos\frac{\pi x_1}{a}e^{ik_3x_3},\quad \left(H_0\triangleq -i\frac{\pi E_0}{\omega\mu a}\right)$$

$$H_1=+\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial E_2}{\partial x_3}=-i\frac{k_3a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi x_1}{a}e^{ik_3x_3}$$

$$H_2=0$$

- **具有最低的截止频率。**
- **电场与传播方向垂直（不存在$\mathrm{TM}_{10}$模）。**

43



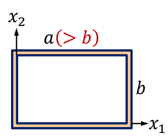
## 主模的电荷与电流

- 窄边（$x_1=0,a$）无自由电荷分布。
- 宽边（$x_2=0,b$）自由电荷周期性振动，各点振幅为

$$\sigma_f\Big|_{x_2=0}=\epsilon E_0\sin\frac{\pi x_1}{a}e^{ik_3x_3}=-\sigma_f\Big|_{x_2=b}$$

- **窄边上无纵向电流（横向开缝影响小）**

$$\vec{K}_f\Big|_{x_1=0}=-H_0e^{ik_3x_3}\hat{x}_2=\vec{K}_f\Big|_{x_1=a}$$

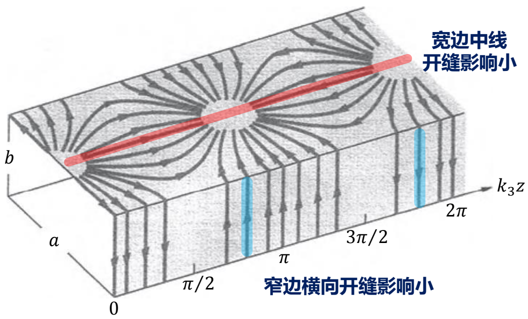



- **宽边中线无横向电流（可开缝）**

$$\vec{K}_f\Big|_{x_2=0}=H_0\left(\cos\frac{\pi x_1}{a}\hat{x}_1+i\frac{k_3a}{\pi}\sin\frac{\pi x_1}{a}\hat{x}_3\right)e^{ik_3x_3}=-\vec{K}_f\Big|_{x_2=b}$$

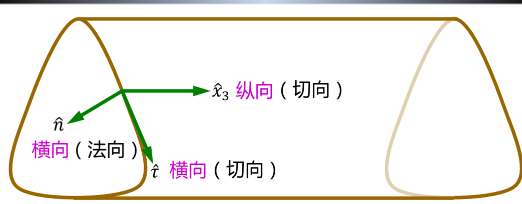
45

## TE$_{10}$模的电流




46

## 四、波导的一般讨论




- 为了讨论方便，将坐标区分横向和纵向

$$\vec{x} = \vec{x}_\perp + x_3\hat{x}_3, \quad (\vec{x}_\perp = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2)$$

由此，梯度算子也就可以写为

$$\nabla = \nabla_\perp + \hat{x}_3\partial_3, \quad (\nabla_\perp = \hat{x}_1\partial_1 + \hat{x}_2\partial_2)$$

47

## 波导中的行波解

沿$x_3$轴方向传播的行波解可写为：

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3} = \left[\vec{E}_\perp(\vec{x}_\perp) + E_3(\vec{x}_\perp)\hat{x}_3\right]e^{ik_3x_3} \\ \vec{H}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3} = \left[\vec{H}_\perp(\vec{x}_\perp) + H_3(\vec{x}_\perp)\hat{x}_3\right]e^{ik_3x_3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] &= \nabla_\perp\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] + \hat{x}_3\partial_3\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] \\ &= \nabla_\perp\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] + ik_3\hat{x}_3\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] = (\nabla_\perp + ik_3\hat{x}_3)\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right]$$

略去$e^{ik_3x_3}$后，行波解求梯度可转化为对振幅的作用

$$\nabla\left[f(\vec{x}_\perp)e^{ik_3x_3}\right] \quad \longrightarrow \quad (\nabla_\perp + ik_3\hat{x}_3)f(\vec{x}_\perp)$$

48

## 独立方程

采用如下两个定态场方程讨论波导中行波解的性质

$$\nabla\times\vec{E} = +i\omega\mu\vec{H},\quad \nabla\times\vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

将行波解代入，略去$e^{ik_3x_3}$后，第一个方程等价于

$$(\nabla_\perp + ik_3\hat{x}_3)\times(\vec{E}_\perp + E_3\hat{x}_3) = +i\omega\mu(\vec{H}_\perp + H_3\hat{x}_3)$$

即有

$$\boxed{\nabla_\perp\times\vec{E}_\perp} + \boxed{\nabla_\perp E_3\times\hat{x}_3 + ik_3\hat{x}_3\times\vec{E}_\perp} = \boxed{i\omega\mu\vec{H}_\perp} + \boxed{i\omega\mu H_3\hat{x}_3}$$

由此给出行波解的横向、纵向分量满足的方程

$$\nabla_\perp\times\vec{E}_\perp = +i\omega\mu H_3\hat{x}_3,\quad ik_3\hat{x}_3\times\vec{E}_\perp - i\omega\mu\vec{H}_\perp = \hat{x}_3\times\nabla_\perp E_3$$

$$\nabla_\perp\times\vec{H}_\perp = -i\omega\varepsilon E_3\hat{x}_3,\quad ik_3\hat{x}_3\times\vec{H}_\perp + i\omega\varepsilon\vec{E}_\perp = \hat{x}_3\times\nabla_\perp H_3$$

49

## 波导中不容许有横电磁波（TEM）

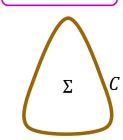
如果$E_3 = 0 = H_3$，则行波解方程写为

$$\nabla_\perp\times\vec{E}_\perp = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}_\perp = -\nabla_\perp\varphi(\vec{x}_\perp)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\nabla_\perp\times\vec{H}_\perp = 0\\ k_3\hat{x}_3\times\vec{E}_\perp = \omega\mu\vec{H}_\perp\end{array}} \quad\Longrightarrow\quad \nabla_\perp\cdot\vec{E}_\perp = 0$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla_\perp^2\varphi(\vec{x}_\perp) = 0}$$

$$k_3\hat{x}_3\times\vec{H}_\perp = i\omega\varepsilon\vec{E}_\perp$$

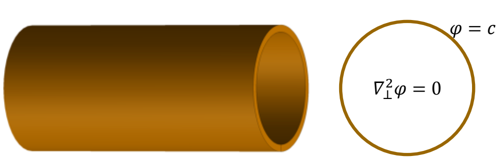



$\vec{E}_\perp$垂直于边界$\Longrightarrow\boxed{\varphi(\vec{x}_\perp\in C) = const.}$

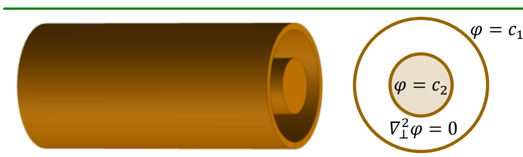
$$\Longrightarrow\quad \varphi(\vec{x}_\perp\in\Sigma) = const. \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}_\perp = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{H}_\perp = 0$$

**波导中不存在电场和磁场均与传播方向垂直的行波。**

50




**波导中不存在TEM波**




**同轴线中可以有TEM波**

51

## 纵向分量不能为常数

**TM模**：$E_3 \neq 0,\quad H_3 = 0$

**TM模的$E_3$不能为常数。**（否则违背边界条件）

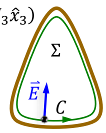
**TE模**：$E_3 = 0,\quad H_3 \neq 0$

**TE模的$H_3$不能为常数。**

$$0 = \oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E}_\perp = \iint_\Sigma d\vec{\sigma} \cdot (\nabla_\perp \times \vec{E}_\perp) = \iint_\Sigma d\vec{\sigma} \cdot (i\omega\mu H_3 \hat{x}_3)$$

若TE模的$H_3$为常数，则

$$0 = i\omega\mu H_3 \Sigma \quad \Longrightarrow \quad H_3 = 0$$




52

## 纵向分量决定横向分量

$$\begin{cases} ik_3\hat{x}_3 \times \vec{E}_\perp - i\omega\mu\vec{H}_\perp = \hat{x}_3 \times \nabla_\perp E_3 \text{ ①} & k_3\hat{x}_3 \times \text{①} + \omega\mu \times \text{②} \\ ik_3\hat{x}_3 \times \vec{H}_\perp + i\omega\varepsilon\vec{E}_\perp = \hat{x}_3 \times \nabla_\perp H_3 \text{ ②} & k_3\hat{x}_3 \times \text{②} + \omega\varepsilon \times \text{①} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma^2\vec{E}_\perp = ik_3\nabla_\perp E_3 - i\omega\mu\hat{x}_3 \times \nabla_\perp H_3 \\ \gamma^2\vec{H}_\perp = ik_3\nabla_\perp H_3 + i\omega\varepsilon\hat{x}_3 \times \nabla_\perp E_3 \end{cases} \qquad (\gamma^2 \triangleq \omega^2\mu\varepsilon - k_3^2)$$

**行波解的纵向分量决定了其横向分量。**

**TM模（$H_3 = 0$）** $\Longrightarrow \quad \vec{E}_\perp = \dfrac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp E_3,\quad \vec{H}_\perp = +\dfrac{i\omega\varepsilon}{\gamma^2}\hat{x}_3 \times \nabla_\perp E_3$

**TE模（$E_3 = 0$）** $\Longrightarrow \quad \vec{H}_\perp = \dfrac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp H_3,\quad \vec{E}_\perp = -\dfrac{i\omega\mu}{\gamma^2}\hat{x}_3 \times \nabla_\perp H_3$

53

## 波导中行波解纵向分量的方程

- **TM模**：电场的纵向分量满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla_\perp^2 + \gamma^2)E_3 = 0$$

一旦确定了$E_3$，TM模解也就确定了：

$$\vec{E}_\perp = \frac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp E_3,\quad \vec{H} = \frac{i\omega\varepsilon}{\gamma^2}\hat{x}_3 \times \nabla_\perp E_3 = +\frac{\omega\varepsilon}{k_3}\hat{x}_3 \times \vec{E}_\perp$$

- **TE模**：磁场的纵向分量满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla_\perp^2 + \gamma^2)H_3 = 0$$

一旦确定了$H_3$，TE模解也就确定了：

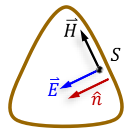
$$\vec{H}_\perp = \frac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp H_3,\quad \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{\gamma^2}\hat{x}_3 \times \nabla_\perp H_3 = -\frac{\omega\mu}{k_3}\hat{x}_3 \times \vec{H}_\perp$$

54

## 纵向分量的边界条件

理想导体边界条件为

$$\hat{n}\times\vec{E}\big|_S = 0$$




- **TM模**：电场的纵向分量满足边界条件

$$E_3\big|_S = 0 \qquad （E_3\text{为切向分量）}$$

- **TE模**：磁场的纵向分量满足边界条件

$$\left.\frac{\partial H_3}{\partial n}\right|_S = 0$$

$$0 = \hat{n}\times\vec{E} \propto \hat{n}\times(\hat{x}_3\times\nabla_\perp H_3) = (\hat{n}\cdot\nabla_\perp H_3)\hat{x}_3 = (\partial H_3/\partial n)\hat{x}_3$$

$$\vec{E} = -(i\omega\mu/\gamma^2)\hat{x}_3\times\nabla_\perp H_3$$

55

## 波导问题求解总结

波导中传送的行波，一般是TE模和TM模的叠加。

- **TM模求解的关键是确定电场的纵向分量**

$$(\nabla_\perp^2+\gamma^2)E_3 = 0,\quad E_3\big|_S = 0,\quad (\gamma^2 \triangleq \omega^2\mu\varepsilon - k_3^2)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{E} = \left(\frac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp E_3 + E_3\hat{x}_3\right)e^{i(k_3x_3-\omega t)} \quad\Rightarrow\quad \vec{H} = +\frac{\omega\varepsilon}{k_3}\hat{x}_3\times\vec{E}$$

- **TE模求解的关键是确定磁场的纵向分量**

$$(\nabla_\perp^2+\gamma^2)H_3 = 0,\quad \left.\frac{\partial H_3}{\partial n}\right|_S = 0,\quad (\gamma^2 \triangleq \omega^2\mu\varepsilon - k_3^2)$$

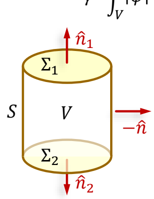
$$\Rightarrow\quad \vec{H} = \left(\frac{ik_3}{\gamma^2}\nabla_\perp H_3 + H_3\hat{x}_3\right)e^{i(k_3x_3-\omega t)} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = -\frac{\omega\mu}{k_3}\hat{x}_3\times\vec{H}$$

56

## $\gamma^2$必然大于零

对TM模，设$\psi(\vec{x}_\perp) = E_3(\vec{x}_\perp)$；对TE模，设$\psi(\vec{x}_\perp) = H_3(\vec{x}_\perp)$。

$$\boxed{(\nabla_\perp^2+\gamma^2)\psi = 0,}\quad \boxed{\psi\big|_S = 0\ (\mathrm{TM}),\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = 0\ (\mathrm{TE})}$$




$$\gamma^2\int_V|\psi|^2dV = \int_V(\psi^*\gamma^2\psi)dV = -\int_V(\psi^*\nabla_\perp^2\psi)dV$$

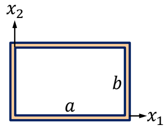
$$= -\int_V[\nabla_\perp\cdot(\psi^*\nabla_\perp\psi) - \nabla_\perp\psi^*\cdot\nabla_\perp\psi]dV$$

$$= -\oint_{\partial V}\psi^*\nabla_\perp\psi\cdot d\vec{\sigma} + \int_V|\nabla_\perp\psi|^2dV$$

$$= +\underbrace{\boxed{\int_S\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma}}_{=0\text{（边条）}} + \underbrace{\boxed{\int_V|\nabla_\perp\psi|^2dV}}_{>0(\psi\neq C)}$$

57

## 矩形波导管中的TM模




分离变量：令$E_3(\vec{x}_\perp) = X_1(x_1)X_2(x_2)$

$$\frac{\nabla_\perp^2 E_3}{E_3} + \gamma^2 = \underbrace{\boxed{\frac{1}{X_1}\frac{d^2X_1}{dx_1^2}}}_{-k_1^2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{X_2}\frac{d^2X_2}{dx_2^2}}}_{-k_2^2} + \gamma^2 = 0$$

$$(k_1^2 + k_2^2 = \gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_3^2)$$

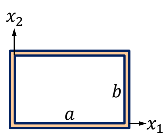
$$\Longrightarrow \quad E_3 = (a_1 \cos k_1x_1 + b_1 \sin k_1x_1)(a_2 \cos k_2x_2 + b_2 \sin k_2x_2)$$

边条：$\begin{cases} E_3\big|_{x_1=0} = 0 = E_3\big|_{x_2=0} & \Longrightarrow \quad E_3 = A \sin k_1x_1 \sin k_2x_2 \\ E_3\big|_{x_1=a} = 0 = E_3\big|_{x_2=b} & \Longrightarrow \quad k_1 = \dfrac{m\pi}{a}, \quad k_2 = \dfrac{n\pi}{b} \end{cases}$

**$m, n$为整数，且二者皆不为零。**

58

## 矩形波导管中的TE模



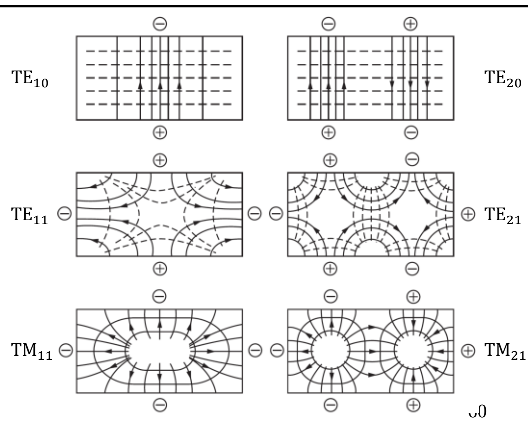

$H_3$的分离变量解为

$$H_3 = (a_1 \cos k_1x_1 + b_1 \sin k_1x_1)$$
$$\times (a_2 \cos k_2x_2 + b_2 \sin k_2x_2)$$
$$(k_1^2 + k_2^2 = \gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_3^2)$$

边条：$\begin{cases} \dfrac{\partial H_3}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = 0 = \dfrac{\partial H_3}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} & \Longrightarrow \quad H_3 = A \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=a} = 0 = \dfrac{\partial H_3}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=b} & \Longrightarrow \quad k_1 = \dfrac{m\pi}{a}, \quad k_2 = \dfrac{n\pi}{b} \end{cases}$

**$m, n$为整数，且至多一个为零。**

59




60

## 圆形波导管

采用柱坐标系

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- **TM模**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \gamma^2\right)E_3 = 0, \quad E_3\Big|_S = 0$$

- **TE模**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \gamma^2\right)E_3 = 0, \quad \frac{\partial H_3}{\partial n}\Big|_S = 0$$

61