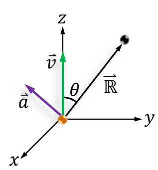
§3 相对论点电荷的辐射

讨论相对论粒子的辐射时，将 $\vec{\beta}$ 方向定义为极轴方向是方便的，并不妨将 $\vec{\beta}$ 和 $\vec{a}$ 所张平面定义为是 xz 平面，即

$$\vec{\beta} = \beta\hat{z}, \quad \vec{a} = a_{\perp}\hat{x} + a_{\parallel}\hat{z}$$



因此

$$\mathbb{R}\cdot\vec{n} = 1 - \mathbb{R}\cdot\vec{\beta} = 1 - \beta\cos\theta$$

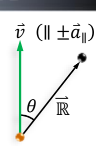
从而，辐射功率的角分布写为了

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\mathbb{R}\times(\vec{n}\times\vec{a})\right|^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

一、加速度与速度平行

如果粒子加速度与速度（反）平行，即

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} = a_{\parallel}\hat{z}$$

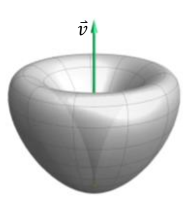


那么

$$\mathbb{R}\times(\vec{n}\times\vec{a}_{\parallel}) = \mathbb{R}\times\left(\mathbb{R}\times\vec{a}_{\parallel}\right) = (a_{\parallel}\sin\theta)\hat{\theta}$$

因而

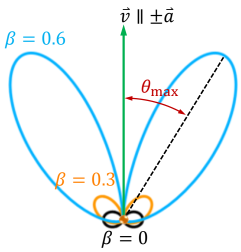
$$\frac{dP_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{e_s^2 a_{\parallel}^2}{4\pi c^3}g_{\parallel}(\theta)$$

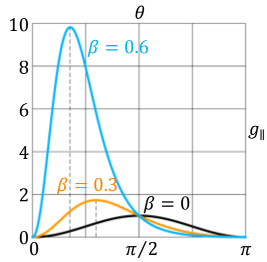


这里定义了角度因子

$$g_{\parallel}(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

- $dP_\parallel/d\Omega$ 与 $a_\parallel$ 的平方成正比，而与其符号无关。
- 运动的正前方（$\theta=0$）和正后方（$\theta=\pi$）没有辐射。
- β 越大，辐射最强方向越向着 $\vec{\beta}$ 方向、即运动前方靠拢。





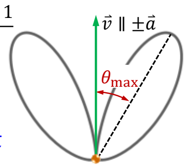
极大辐射方向

辐射最强方向的极角 $\theta_{\max}$ 为 $g_\parallel(\theta)$ 的极值点，由

$$\left.\frac{dg_\parallel(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{\max}} = \left.\frac{3\beta\cos^2\theta+2\cos\theta-5\beta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\sin\theta\right|_{\theta=\theta_{\max}} = 0$$

$$\Rightarrow\quad \cos\theta_{\max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}$$

$$= \frac{4\sqrt{1-(15/16)\gamma^{-2}}-1}{3\sqrt{1-\gamma^{-2}}}$$



在极端相对论情形，$\gamma \gg 1$，因而

$$\cos\theta_{\max} \approx 1-\frac{1}{8\gamma^2} \quad\Rightarrow\quad \theta_{\max} = \frac{1}{2\gamma}$$

辐射总功率

$$\int_0^\pi g_\parallel(\theta)\sin\theta\,d\theta = \int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{(1-\beta u)^5}du$$

$$= \int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{(1-\beta u)^3}+\frac{2}{\beta^2}\frac{1}{(1-\beta u)^4}+\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)\frac{1}{(1-\beta u)^5}\right]du$$

$$= \frac{1}{\beta^3}\left[-\frac{1}{2(1-\beta u)^2}+\frac{2}{3(1-\beta u)^3}-\frac{1-\beta^2}{4(1-\beta u)^4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\left[-\frac{2}{(1-\beta^2)^2}+\frac{4(3+\beta^2)}{3(1-\beta^2)^3}-\frac{2(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^3}\right]$$

略作化简，得到

$$\int_0^{\pi} g_{\parallel}(\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{4}{3}\gamma^6 \quad \Longrightarrow \quad \oint g_{\parallel}(\theta) d\Omega = \frac{8\pi}{3}\gamma^6$$

由此，辐射总功率为

$$P_{\parallel} = \oint \frac{dP_{\parallel}}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e_s^2 a_{\parallel}^2}{3c^3}\gamma^6$$

- 速度一定时，$P_{\parallel} \propto a_{\parallel}^2$。
- $a_{\parallel}$ 一定时，$P_{\parallel} \propto \gamma^6$。
  - $P_{\parallel}$ 是 β 的增函数：当 $\beta \to 1$ 时，$P_{\parallel} \to \infty$。

7

直线加速器中的辐射损失

在直线加速器中（设带电粒子沿着 x 轴运动），由于

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma^3 m\vec{a}, \quad F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

因而

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3}\frac{e_s^2 F^2}{m^2 c^3} = \frac{2}{3}\frac{e_s^2}{m^2 c^3}\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}e_s^2 c\left(\frac{d}{dx}\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2$$

- 当 F 一定时，$P_{\parallel}$ 与粒子的能量（或速度）无关。
- 对于不同的带电粒子，当 F 一定时，$P_{\parallel} \propto m^{-2}$，因此

$$\frac{P_{\parallel}(\text{electron})}{P_{\parallel}(\text{proton})} = \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^2 \approx 3.4 \times 10^6$$

与质子相比，电子的辐射损失要严重得多。

8

- 考察直线加速器中的电子。单位时间由于辐射损失的能量与从加速电场获得的能量之比为

$$\xi \triangleq \frac{P_{\parallel}}{Fv} = \frac{2}{3}\frac{e_s^2 F}{m_e^2 c^4 \beta} = \frac{2}{3}\frac{r_e F}{\beta m_e c^2}$$

其中，r_e 是电子的经典半径

$$r_e \triangleq \frac{e_s^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \text{ fm}$$

所以，在相对论情形（$\beta \approx 1$）下，如果 $\xi \sim 10^{-10}$，则要求

$$F = eE \sim 10^{-11} \text{ MeV/fm}$$

即要求加速电场

$$E \sim 10^{10} \text{ V/m}$$

对于直线加速器中的带电粒子，即便是电子，辐射损失仍是不重要的，在设计直线加速器时完全可以不考虑辐射损失。

9

二、加速度与速度垂直

如果粒子加速度与速度垂直，则

$$\vec{a} = \vec{a}_\perp = a_\perp \hat{x}$$

此时有

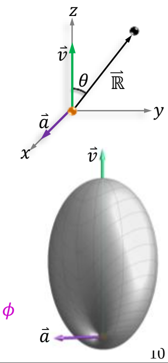
$$\hat{\mathbb{R}} \times (\vec{n} \times \vec{a}_\perp) = \hat{\theta} a_\perp (\beta - \cos\theta)\cos\phi + \hat{\phi} a_\perp (1 - \beta\cos\theta)\sin\phi$$

因而

$$\frac{dP_\perp}{d\Omega} = \frac{e_s^2 a_\perp^2}{4\pi c^3} g_\perp(\theta,\phi)$$

这里定义了角度因子

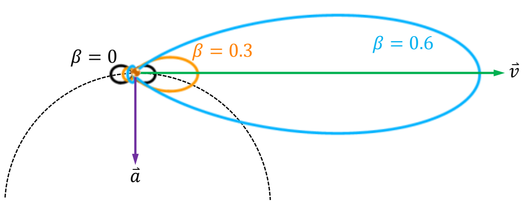
$$g_\perp(\theta,\phi) = \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} - \frac{1}{\gamma^2} g_\parallel(\theta)\cos^2\phi$$



- $dP_\perp/d\Omega$ 与 $a_\perp$ 的平方成正比，而与其符号无关。
- 粒子运动的正前方（$\theta = 0$）辐射最强。

$$g_\perp(\theta,\phi) = \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3} - \frac{1}{\gamma^2} g_\parallel(\theta)\cos^2\phi$$

- β 越大，辐射越集中于运动正前方。



辐射总功率

利用

$$\oint g_\perp(\theta,\phi)d\Omega = \frac{8\pi}{3}\gamma^4$$

可得辐射总功率为

$$P_\perp = \oint \frac{dP_\perp}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e_s^2 a_\perp^2}{3c^3}\gamma^4$$

- 速度一定时，$P_\perp \propto a_\perp^2$。
- $a_\perp$ 一定时，$P_\perp \propto \gamma^4$。
  - $P_\perp$ 是 β 的增函数：当 $\beta \to 1$ 时，$P_\perp \to \infty$。
- 在速度和加速度大小均相同的情形下，两种情形下的辐射功率之比为 $P_\parallel / P_\perp = \gamma^2$。

圆形加速器中的辐射损失

在圆形储存环中（半径设为 R），由于

$$\vec{F}=\gamma m\vec{a},\quad a=v^2/R=c^2\beta^2/R$$

因而

$$P_\perp=\frac{2e_s^2F^2}{3m^2c^3}\gamma^2=\frac{2e_s^2c}{3R^2}\beta^4\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4$$

- 当 F 一定时，$P_\perp$ 随着粒子能量（或速度）的增大而增加。
- 对于一定的力，$P_\parallel/P_\perp=\gamma^{-2}$。
- 对于不同的带电粒子，当 $\mathcal{E}$ 一定时，$P_\perp\propto m^{-4}$，因此

$$\frac{P_\perp(\text{electron})}{P_\perp(\text{proton})}=\left(\frac{m_p}{m_e}\right)^4\approx 1.1\times10^{13}$$

与质子相比，电子的辐射损失要严重得多。

13

- 对于做圆周运动的带电粒子，为了维持其速度或能量不变，每周（$T=2\pi R/v$）外界需要提供的能量就等于辐射损失，该能量损失与粒子能量之比为

$$\xi\triangleq\frac{P_\perp T}{\mathcal{E}}=\frac{4\pi}{3}\frac{e_s^2}{R\cdot mc^2}\beta^3\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$$

在极端相对论情形（$\beta\approx1$），对于电子和质子分别有

$$\xi(\text{electron})\approx 8.85\times10^{-5}\frac{(\mathcal{E}/\text{GeV})^3}{R/\text{m}}$$

$$\xi(\text{proton})\approx 7.79\times10^{-18}\frac{(\mathcal{E}/\text{GeV})^3}{R/\text{m}}$$

14

- 若带电粒子圆周运动的半径为 $R=4.5\times10^3$ m。由此可得
  - 对于质子，当 $\mathcal{E}=7$ TeV $=7000$ GeV 时，

$$\xi(\text{proton})\approx 5.9\times10^{-10}\quad\Longrightarrow\quad P_\perp T\approx 4.2\times10^3\ \text{eV}$$

  - 对于电子，当 $\mathcal{E}=7$ TeV $=7000$ GeV 时

$$\xi(\text{electron})\approx 6.7\times10^3$$

此结果当然是荒谬的。当 $\mathcal{E}=60$ GeV 时

$$\xi(\text{electron})\approx 0.42\%\quad\Longrightarrow\quad P_\perp T\approx 250\ \text{MeV}$$

15

三、一般情形

一般情形下，粒子的加速度为

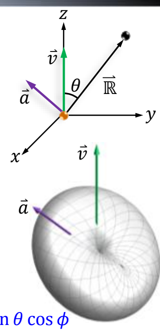
$$\vec{a} = a_\perp \hat{x} + a_\parallel \hat{z}$$

由于

$$\hat{\mathbb{R}} \times (\vec{n} \times \vec{a}) = (a_\parallel \sin\theta)\hat{\theta}$$

$$+a_\perp(\beta - \cos\theta)\cos\phi\,\hat{\theta}$$

$$+a_\perp(1 - \beta\cos\theta)\sin\phi\,\hat{\phi}$$



因而辐射功率角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP_\parallel}{d\Omega} + \frac{dP_\perp}{d\Omega} + \frac{e_s^2 a_\parallel a_\perp}{2\pi c^3}\frac{(\beta - \cos\theta)\sin\theta\cos\phi}{(1 - \beta\cos\theta)^5}$$

16

辐射总功率

辐射总功率为：

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = P_\parallel + P_\perp = \frac{2e_s^2}{3c^3}\gamma^6\left(a_\parallel^2 + \frac{a_\perp^2}{\gamma^2}\right)$$

由于

$$a_\parallel^2 + \frac{a_\perp^2}{\gamma^2} = a_\parallel^2 + (1 - \beta^2)a_\perp^2 = a^2 - \left|\vec{\beta} \times \vec{a}\right|^2$$

所以，辐射总功率又可以写为

$$P = \frac{2e_s^2}{3c^3}\gamma^6\left(a^2 - \left|\vec{\beta} \times \vec{a}\right|^2\right) = \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}\gamma^6\left(1 - \left|\vec{\beta} \times \hat{a}\right|^2\right)$$

这就是**李纳公式**。

17

辐射总功率的一般推导

设 n_k 和 β_k 分别是 $\hat{\mathbb{R}}$ 和 $\vec{\beta}$ 的笛卡尔分量，则

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\hat{\mathbb{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbb{R}} - \vec{\beta}\right) \times \vec{a}\right]\right|^2}{g^5}, \quad \left(g \triangleq 1 - \hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{\beta} = 1 - \beta_k n_k\right)$$

因而，加速运动点电荷的辐射总功率可以写为：

$$P = \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\oint \frac{\left|\left(\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{a}\right)\left(\hat{\mathbb{R}} - \vec{\beta}\right) - g\vec{a}\right|^2}{g^5} d\Omega$$

$$= \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\oint \frac{g^2 a^2 + 2g\left(\vec{\beta} \cdot \vec{a}\right)\left(\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{a}\right) - (1 - \beta^2)\left(\hat{\mathbb{R}} \cdot \vec{a}\right)^2}{g^5} d\Omega$$

$$= \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\left[a^2 I + 2\left(\vec{\beta} \cdot \vec{a}\right)a_i J_i - (1 - \beta^2)a_i a_j K_{ij}\right]$$

18

这里定义了积分

$$I=\oint\frac{d\Omega}{g^3},\quad J_i=\oint\frac{n_i}{g^4}d\Omega,\quad K_{ij}=\oint\frac{n_i n_j}{g^5}d\Omega$$

将极轴定义为沿着速度的方向，易得第一个积分：

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^3}=\frac{4\pi}{(1-\beta^2)^2}=4\pi\gamma^4$$

由此，后面两个积分也不难给出：

$$\begin{cases}J_i=\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial I}{\partial\beta_i}=\dfrac{16\pi}{3}\dfrac{\beta_i}{(1-\beta^2)^3}\\ K_{ij}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial J_i}{\partial\beta_j}=\dfrac{4\pi}{3}\dfrac{\delta_{ij}}{(1-\beta^2)^3}+8\pi\dfrac{\beta_i\beta_j}{(1-\beta^2)^4}\end{cases}$$

这样我们就得到

$$I=4\pi\gamma^4,\quad J_i=\frac{16\pi}{3}\gamma^6\beta_i,\quad K_{ij}=\frac{4\pi}{3}\gamma^6\left(\delta_{ij}+6\gamma^2\beta_i\beta_j\right)$$

将其代入前面所的辐射总功率的表达式，得到：

$$\begin{aligned}P&=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\left[a^2I+2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)a_iJ_i-(1-\beta^2)a_ia_jK_{ij}\right]\\&=\frac{e_s^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{4\pi}{3}\gamma^4\left\{3a^2+8\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2-\left[a^2+6\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2\right]\right\}\\&=\gamma^4\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[a^2+\gamma^2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)^2\right]\end{aligned}$$

由此就给出了点电荷辐射的李纳公式：

$$P=\gamma^6\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[a^2-\left|\vec{\beta}\times\vec{a}\right|^2\right]$$

四、关于辐射的协变形式结论

协变形式的辐射功率

粒子的4-加速度 $w^\alpha\triangleq du^\alpha/d\tau$ 的分量为

$$\begin{cases}w^0=\gamma^4\beta a_\parallel\\ \vec{w}_\parallel=\gamma^4\vec{a}_\parallel\\ \vec{w}_\perp=\gamma^2\vec{a}_\perp\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}w^\mu w_\mu&=|\vec{w}|^2-(w^0)^2\\&=\gamma^4\{[(\gamma^4a_\parallel^2+a_\perp^2)-\gamma^4\beta^2a_\parallel^2]\}\\&=\gamma^6\left[a^2-\left|\vec{\beta}\times\vec{a}\right|^2\right]\end{aligned}$$

因此，可将辐射功率写为协变的形式：

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{2e_s^2}{3c^3}w^\mu w_\mu$$

辐射功率是不变量（4-标量），与惯性参考系的选取无关。

辐射动量

辐射场的动量流密度张量为

$$\overleftrightarrow{T} \triangleq w\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E} + c^2\vec{B}\vec{B}\right) = w\hat{\mathbb{R}}\hat{\mathbb{R}}$$

因而，单位时间内粒子由于辐射而损失的动量为

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \oint d\vec{\sigma}\cdot g\overleftrightarrow{T} = \oint gw\mathbb{R}^2\hat{\mathbb{R}}d\Omega = \frac{1}{c}\oint \frac{dP}{d\Omega}\hat{\mathbb{R}}d\Omega$$

其中

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e_s^2}{4\pi c^3}\frac{\left|\hat{\mathbb{R}}\times\left[\left(\hat{\mathbb{R}}-\vec{\beta}\right)\times\vec{a}\right]\right|^2}{g^5}, \quad (g \triangleq 1-\beta_k n_k)$$

因此

$$\frac{dG_i}{dt} = \frac{e_s^2}{4\pi c^4}\left[a^2A_i + 2\left(\vec{\beta}\cdot\vec{a}\right)a_jB_{ij} - (1-\beta^2)a_ja_kC_{ijk}\right]$$

22

这里定义了积分

$$A_i = \oint \frac{n_i}{g^3}d\Omega, \quad B_{ij} = \oint \frac{n_in_j}{g^4}d\Omega, \quad C_{ijk} = \oint \frac{n_in_jn_k}{g^5}d\Omega$$

将极轴定义为沿着速度的方向，易得：

$$M = \oint \frac{d\Omega}{g^2} = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{du}{(1-\beta u)^2} = \frac{4\pi}{1-\beta^2} = 4\pi\gamma^2$$

由此，不难给出此处的三个积分：

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M}{\partial\beta_i} = 4\pi\gamma^4\beta_i \\ B_{ij} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial A_i}{\partial\beta_j} = \dfrac{4\pi}{3}\gamma^4\left(\delta_{ij} + 4\gamma^2\beta_i\beta_j\right) \\ C_{ij} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial B_{ij}}{\partial\beta_k} = \dfrac{4\pi}{3}\gamma^6\left[\left(\delta_{ij}\beta_k + \delta_{ik}\beta_j + \delta_{jk}\beta_i\right) + 6\gamma^2\beta_i\beta_j\beta_k\right] \end{cases}$$

23

将前面的积分结果代入辐射动量的表达式中，略作化简得到

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\vec{\beta}}{c}\gamma^6\frac{2e_s^2}{3c^3}\left[a^2 - \left|\vec{\beta}\times\vec{a}\right|^2\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\vec{\beta}}{c}\frac{dW}{dt}$$

定义辐射场的4-动量

$$P^\alpha = \left(\frac{W}{c}, \vec{G}\right)$$

因此，单位时间内粒子由于辐射而损失的4-动量为

$$\frac{dP^\alpha}{dt} = \frac{1}{c}\left(1, \vec{\beta}\right)\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\gamma c^2}\frac{dW}{dt}u^\alpha$$

其中，$u^\alpha \triangleq dx_e^\alpha/d\tau$ 为粒子的4-速度。

24

4-动量发射

利用固有时，粒子的4-动量可将前面的结果表示为

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau}=\gamma\frac{dP^\alpha}{dt}=\frac{1}{c^2}\frac{dW}{dt}u^\alpha$$

将辐射功率的表达式代入，得到

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau}=\frac{2e_s^2}{3c^5}w^\mu w_\mu u^\alpha$$

可见，辐射场的4-动量确实为4-矢量。

思考：在洛伦兹变换下，辐射功率的角分布如下变换

$$\frac{dP}{d\Omega}=\gamma^2(1+\beta\cos\theta')^3\frac{dP'}{d\Omega'}=\frac{1}{\gamma^4(1+\beta\cos\theta)^3}\frac{dP'}{d\Omega'}$$

25

§4 带电粒子的电磁质量和辐射阻尼

26

一、带电粒子的电磁质量

- 带电粒子的运动状态改变时，由此会造成两方面的影响：
  - **粒子对场的影响：**带电粒子运动状态的改变导致其周围的电磁场也随之变化，并有一部分电磁场辐射出去。
  - **场对粒子的影响：**一般来说，一个粒子产生的电磁场也会对粒子自身产生作用力。
- 粒子产生的电磁场，对粒子的作用将带来两个后果：
  - 使粒子附加了一个质量（称为粒子的**电磁质量**）。
  - **辐射阻尼力效应。**

27

问题的简化

为了简化讨论，我们做如下假设：

- 假设粒子的电荷分布在半径为 r_0 的球内，且是球对称的。
  - 粒子激发的静电场具有球对称性（其中 $\hat{r} = n_i \hat{x}_i$）

$$\vec{E}_0 = E_0(r)\hat{r} = E_0 n_i \hat{x}_i$$

  - 粒子的静电能记为

$$W_0 = \int \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\right) d^3x = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

- 假设粒子的速度远小于 c，从而电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 可取为

$$\vec{E} = \vec{E}_0, \quad \vec{B} = \vec{v} \times \vec{E}_0 / c^2$$

28

电磁质量的由来

- 质量为 m_0 的粒子以速度 $\vec{v}$ 运动时，其动量和动能分别为：

$$\vec{p} = m_0 \vec{v}, \quad T = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

  - 由于粒子的运动方程为 $\vec{F} = m_0 \dot{\vec{v}}$，因而粒子速度改变时，外界需要提供的冲量和做的功分别为 $\Delta\vec{p}$ 和 ΔT。
- 对于匀速运动粒子，辐射场为零，全部电磁场都属于自场。自场本身具有动量 $\vec{G}$ 和能量 W。
  - 速度不同，自场也不同。因而改变粒子的速度时，所需提供的冲量和做的功就分别变为了 $\Delta(\vec{p}+\vec{G})$ 和 $\Delta(T+W)$。

由于携带着自场，带电粒子表现的惯性要比原来的大，相当于在 m_0 上附加了一个质量。这个附加质量称为粒子的电磁质量。

29

自场的动量

$$\vec{G} = \varepsilon_0 \int \vec{E} \times \vec{B} d^3x = \frac{\varepsilon_0}{c^2}\int \vec{E}_0 \times (\vec{v} \times \vec{E}_0) d^3x$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{c^2}\int [E_0^2 \vec{v} - (\vec{E}_0 \cdot \vec{v})\vec{E}_0] d^3x$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{G} = \alpha \vec{v}, \quad \left(\alpha \triangleq \frac{4W_0}{3c^2}\right)$$

$$\int (\vec{E}_0 \cdot \vec{v})\vec{E}_0 d^3x = \hat{x}_i v_j \int E_0^2(r) n_i n_j d^3x \qquad \frac{1}{3}\delta_{ij}\int d\Omega$$

$$= \hat{x}_i v_j \int E_0^2(r) r^2 dr \cdot \boxed{\int n_i n_j d\Omega}$$

$$= \frac{1}{3}\delta_{ij}\hat{x}_i v_j \int E_0^2(r) d^3x = \frac{1}{3}\vec{v}\int E_0^2(r) d^3x$$

30

自场的能量

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2+c^2B^2)d^3x=W_0+\frac{1}{c^2}\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\vec{v}\times\vec{E}_0\right)^2d^3x$$

$$=W_0+\frac{1}{c^2}\int\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[v^2E_0^2-\left(\vec{E}_0\cdot\vec{v}\right)^2\right]d^3x$$

$$\Longrightarrow\quad W=W_0+\frac{1}{2}\alpha v^2$$

$$\int\left(\vec{E}_0\cdot\vec{v}\right)^2d^3x=v_iv_j\int E_0^2(r)n_in_jd^3x$$

$$=v_iv_j\int E_0^2(r)r^2dr\cdot\boxed{\int n_in_jd\Omega}\quad \frac{1}{3}\delta_{ij}\int d\Omega$$

$$=\frac{1}{3}\delta_{ij}v_iv_j\int E_0^2(r)d^3x=\frac{1}{3}v^2\int E_0^2(r)d^3x$$

31

粒子的电磁质量

粒子速度改变时，所需施加的冲量和做的功分别是

$$\Delta(m_0\vec{v}+\alpha\vec{v}),\quad \Delta\left(\frac{1}{2}m_0v^2+\frac{1}{2}\alpha v^2\right)$$

这表明，由于带电粒子携带着自场，它所表现的惯性要比原来的大：相对于原有质量 m_0 之上再附加一个质量 α。这个质量 α 就称为粒子的**电磁质量**。于是运动方程应该换成

$$\vec{F}=m\dot{\vec{v}},\quad (m\triangleq m_0+\alpha)$$

- 实验上测量的带电粒子质量，实际上就是 $m=m_0+\alpha$，而不是 m_0。不可能通过质量的直接测量确定 m_0 和 α 各自的大小。

32

电子的电磁质量

若知道电子内部的电荷分布，则从静电能公式就可计算出 α 来。

- 当电荷均匀分布在半径为 r_0 的球面上时，不难给出

$$W_0=\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_0}=\frac{e_s^2}{2r_0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha=\frac{4W_0}{3c^2}=\frac{2e_s^2}{3c^2r_0}$$

- 当电荷均匀分布在半径为 r_0 的球体内时，不难给出

$$W_0=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_0}=\frac{3e_s^2}{5r_0}\quad\Longrightarrow\quad\alpha=\frac{4W_0}{3c^2}=\frac{4e_s^2}{5c^2r_0}$$

- 若电子是一个严格的点，即 $r_0=0$，则电子质量将为无穷大，而电子的运动状态将不可能被改变。这就是著名的发散困难。

33

电子的经典半径

洛伦兹（Lorentz）和阿伯拉罕（Abraham）曾经假设：

电子的质量可能完全是电磁的，即 $m_0 = 0$。

- 在此假设下，电子的总质量为

$$m_e = \alpha = \frac{4W_0}{3c^2}$$

- 对均匀的球面或球体电荷分布，由此给出的电子半径分别为

$$r_0 = \frac{2}{3}\frac{e_s^2}{m_e c^2}, \quad r_0 = \frac{4}{5}\frac{e_s^2}{m_e c^2}$$

- 对于其他形式的分布，r_0 也具有同样的量级。因此通常把

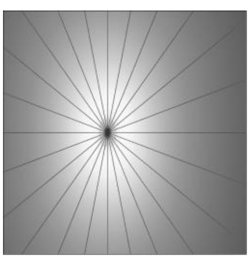
$$r_e \triangleq \frac{e_s^2}{m_e c^2} = 2.82\ \mathrm{fm}$$

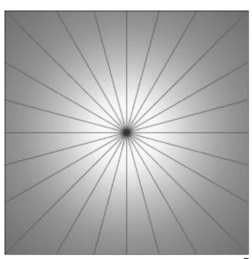
称为**电子的经典半径**。

34

二、辐射阻尼

当粒子辐射电磁场时，其自身的能量将逐渐衰减，这种现象称为**辐射阻尼**（radiation damping）。可见，辐射场必然会对粒子产生反作用，这个作用力 $\vec{F}_R$ 称为**辐射阻尼力**。





35

能量平衡

简单起见，此处只考虑非相对论粒子。此情形下，粒子单位时间辐射出去的能量由拉莫公式给出。

- 根据能量守恒定律，我们似乎应该有关系

$$\vec{F}_R \cdot \vec{v} = -P = -\frac{2e_s^2 a^2}{3c^3}$$

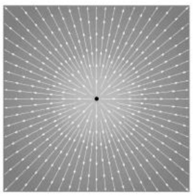
- 由于忽略了粒子自场能量的变化，此公式不可能是正确的。
  - 在速度不断变化情况，由于推迟效应，自场并不与匀速时相同。因而此情形下，自场能量变化并没有完全包含在粒子动能的改变中。
  - 自场与辐射场之间存在干涉效应。

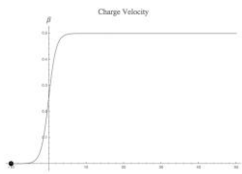
36

两类重要的辐射过程

只有（1）粒子从某匀速运动的初态变到另一个匀速运动的末态；或（2）在周期过程中，粒子附近的场恢复了原状时，辐射场的总能量才等于粒子克服辐射阻尼力所做的功。

【注】在微观物理中，通常的过程有两类，一类是散射过程，一类是粒子在束缚态中的运动。前者初态和末态都是匀速运动，后者大多是周期性或准周期性运动。





37

能量平衡对辐射阻尼力的限制

尽管前面的方程在并不是瞬时成立的，但如果我们在一个合适的范围内对时间积分，所得结果却是正确的：

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_R \cdot \vec{v} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e_s^2 a^2}{3c^3} dt = -\frac{2e_s^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} \cdot d\vec{v}$$

$$= -\frac{2e_s^2}{3c^3} \vec{a} \cdot \vec{v} \bigg|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e_s^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{a}} \cdot \vec{v} dt$$

在以下情形，上式右侧第一项均为零：① 初、末态均为匀速直线运动状态；② 粒子以 $t_2 - t_1$ 为周期运动；③ 匀速圆周运动（ t_1、t_2 任意）。在这些情形下，由能量守恒关系均可给出

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_R - \frac{2e_s^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0$$

38

阿伯拉罕-洛伦兹公式

如果 $\vec{F}_R$ 由下式给出，则前面的关系就可以得到满足：

$$\vec{F}_R = \frac{2e_s^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}$$

这一表达式称为辐射阻尼力的**阿伯拉罕-洛伦兹公式**。

- 辐射阻尼力可表示为

$$\vec{F}_R = m\tau \dot{\vec{a}}, \quad \text{where } \tau = \frac{2e_s^2}{3mc^3} = \frac{2}{3} \frac{e_s^2/mc^2}{c}$$

  - 对于电子，$\tau \approx 6 \times 10^{-24}$ s。
- 在不改变能量守恒要求的前提下，辐射阻尼力公式可以加上任一与 $\vec{v}$ 垂直的项。
- 阿伯拉罕-洛伦兹公式是一种时间平均的辐射阻尼力。它是目前已知的最简单表达式。本课程用此表达式描述辐射阻尼力。

39

阿伯拉罕-洛伦兹方程

对于质量为 m、带电量为 e 的粒子，考虑辐射阻尼力后，其在外力 $\vec{F}_0$ 作用下的运动由如下**阿伯拉罕-洛伦兹方程**确定：

$$m\vec{a} = \vec{F}_0 + m\tau\dot{\vec{a}}$$

- 辐射阻尼力要达到 ma 的量级，即与外力大小可比拟的量级，则要求 a 满足

$$\tau\dot{a} \sim ma$$

即只有当加速度如此剧烈地变化，以至于在极短的时间 r_e/c 内，加速度的改变达到与其自身相同的量级时，辐射阻尼力才可与外力相比拟，而这种条件是很少能满足的。

辐射阻尼的效应一般很微弱，它对粒子运动的修正非常微小。

40

自加速问题

简单起见，设粒子从 $t=0$ 时刻开始受到恒定外力 $\vec{f}$ 作用，即

$$\vec{F}_0(t) = \vec{f}\Theta(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \tau\dot{\vec{a}} + \frac{\vec{f}}{m}\Theta(t)$$

- 将方程从 $t-\epsilon$ 到 $t+\epsilon$ 积分

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \vec{a}dt = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \tau\dot{\vec{a}}dt + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{\vec{f}}{m}dt$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v}(t+\epsilon) - \vec{v}(t-\epsilon) = \tau[\vec{a}(t+\epsilon) - \vec{a}(t-\epsilon)] + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{\vec{f}}{m}dt$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \tau[\vec{a}(t+\epsilon) - \vec{a}(t-\epsilon)] + 0, \quad (\text{when } \epsilon \longrightarrow 0)$$

因此，$\vec{a}(t)$ 是时间 t 的连续函数。

41

- 方程的一般解为

$$\begin{cases} \vec{a}_1(t) = \vec{b}_1 e^{t/\tau}, & (t<0) \\ \vec{a}_2(t) = \vec{b}_2 e^{t/\tau} + \dfrac{\vec{f}}{m}, & (t>0) \end{cases}$$

- $\vec{a}$ 的连续性要求 $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 + \vec{f}/m$，因而

$$\begin{cases} \vec{a}_1(t) = \vec{b}e^{t/\tau}, & (t<0) \\ \vec{a}_2(t) = \vec{b}e^{t/\tau} + \dfrac{\vec{f}}{m}\left(1 - e^{t/\tau}\right), & (t>0) \end{cases}$$

- 除非 $\vec{b} = 0$，否则在外力作用之前粒子就会对外力作出响应（预加速），且 $\vec{a}$ 将随时间 $t(>0)$ 指数增加（自加速）。

42

【思考】 在有其他外力 F_0 作用下，带电粒子的运动方程写为

$$a = \tau\dot{a} + F_0/m$$

- 证明：与电中性粒子（$a = F_0/m$）不同，即便力存在间断点，带电粒子的加速度（如同位置和速度一样）总是t的连续函数。
- 如果粒子只在 $0 < t < T$ 时间范围内受外力 F_0 作用，且 F_0 为常数。试分别写出 $a(t)$ 在 $t < 0$、 $0 < t < T$ 和 $t > T$ 范围内的一般解。
- 利用连续性条件证明：我们确实有可能避免 $t > T$ 内的自加速解，或者避免 $t < 0$ 内的预加速解，但无法同时做到这两点。
- 选择可以避免自加速问题的解，写出 $a(t)$ 和 $v(t)$，对其作图示意，并将其与同样力作用下电中性粒子的 $a(t)$ 和 $v(t)$ 进行比较。

43

经典理论的困难

在一定条件下（非相对论，且速度变化比较平缓），我们可以从洛伦兹力公式直接计算粒子的场对粒子自身的作用力 $\vec{F}_S$，其结果是一个无穷级数

$$\vec{F}_S = -\alpha\vec{a} + \frac{2}{3}\frac{e_s^2\dot{\vec{a}}}{c^3} + \cdots$$

- 虽然粒子半径 $r_0 \to 0$ 时，后面的各项趋于零，但第一项的系数 α 却要趋于无穷，这就出现了前面所说的发散困难。
- 如果 r_0 不等于零，则上述 $\vec{F}_S$ 代入带电粒子的运动方程

$$m_0\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_S$$

得到的电子的运动方程将是一个无穷阶方程，这又在理论上发生了问题。

44

【例】 对于均匀磁场中的带电粒子，如果初始时具有与磁场垂直的速度，试描述粒子接下来的运动，计算粒子速率衰减快慢。

【解】 大多数辐射反应问题用能量方法处理非常简单，图像也比较清晰。假设粒子几乎是在做圆周运动，且 $\beta \ll 1$ 。因此

$$P = \frac{2e_s^2a^2}{3c^3} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\left(\frac{evB}{m}\right)^2 = \frac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0m^2c^3}v^2$$

$$= -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -mv\frac{dv}{dt}$$

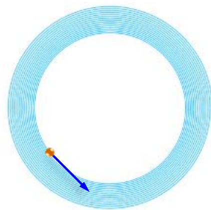
因此

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e^4B^2}{6\pi\varepsilon_0m^3c^3}v$$

45

解为

$$v = v_0 e^{-t/\tau}, \quad \left(\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 m^3 c^3}{e^4 B^2}\right)$$



如果带电粒子为电子，而$B = 1\ \mathrm{T}$，则

$$\tau \approx 5.16\ \mathrm{s}$$

与之相比，电子轨道周期要短得多

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB} \approx 3.57 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}$$

- 电子轨道半径 $r = m_e v/eB$ 随着速度减小而减小。
- 在速度减小为初值的 $1/e$ 之前，电子要转过 1.4×10^{11} 圈。

46